

# Mécanique

## Mouvement d'un projectile

### 1- Objectifs

Les objectifs de ce travail sont de:

- Savoir enregistrer expérimentalement la trajectoire d'un projectile et exploiter le document obtenu
- Déterminer l'équation de la trajectoire d'un projectile lancé dans l'air.
- Tracer des vecteurs vitesse et accélération
- Déterminer les caractéristiques du vecteur accélération
- Trouver les conditions initiales.

### 2- Etude théorique

Le projectile (système) se déplaçant dans le référentiel Terrestre peut être soumis à diverses forces (poids, poussée d'Archimède, forces de frottement fluides, etc.). Toutefois, on ne tiendra compte ni de la poussée d'Archimède, ni de la force de frottement fluide exercée sur le projectile. La seule force qui agit est le poids du corps.

On applique la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre où l'application du théorème du centre d'inertie donne:

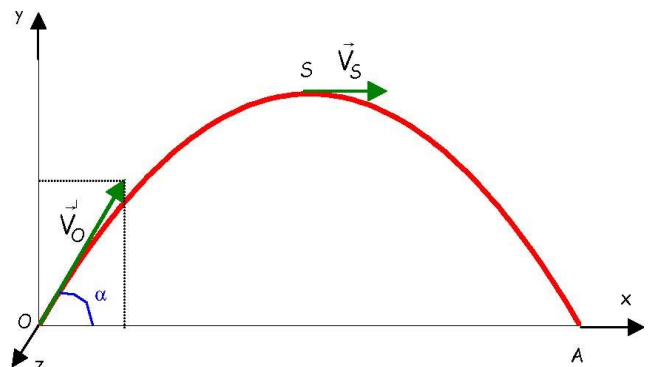
$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

C'est-à-dire:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Le mouvement se faisant dans une petite région l'accélération est constante vectoriellement. En conséquence, l'accélération ne dépend ni de la masse de l'objet, ni de la manière dont il a été lancé.

On étudie le mouvement du centre d'inertie  $G$ , qui est repérée à chaque instant par ses coordonnées dans le repère  $(O; x, y, z)$  orthonormé.



On suppose que le projectile part de l'origine  $O$  du repère à l'instant initial  $t = 0$  avec la vitesse  $\vec{V}_0$ .

On aura pour la position initiale:  $x_0=0, y_0=0, z_0=0$ .

On aura pour la vitesse initiale:  $V_{0x}=V_0 \cdot \cos\alpha, V_{0y}=V_0 \cdot \sin\alpha, V_{0z}=0$ .

En projection dans le repère précédent ( $O; x, y, z$ ) on obtient successivement:

Axe	Accélération	Vitesse	Position
$Ox$	$a_x = 0$	$v_x = V_0 \cdot \cos\alpha$	$x(t) = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$
$Oy$	$a_y = -g$	$v_y = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin\alpha$	$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t$
$Oz$	$a_z = 0$	$v_z = 0$	$z(t) = 0$

Les composantes  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont les équations horaires paramétriques du mouvement.

Le mouvement d'un projectile peut s'interpréter comme la composition de deux mouvements, l'un horizontal et l'autre vertical.

En effet, selon l'axe  $Ox$ , le mouvement est rectiligne uniforme à la vitesse constante de valeur  $V_0 \cdot \cos\alpha$  et selon l'axe  $Oy$ , le mouvement est celui d'une chute libre verticale de vitesse initiale de valeur  $V_0 \cdot \sin\alpha$ .

On remarquera que la cote  $z$  du centre d'inertie  $G$  est constamment nulle.

La trajectoire du centre d'inertie  $G$  du projectile s'effectue donc dans le plan  $z = 0$ .

Pour obtenir l'équation cartésienne  $y = f(x)$  de la trajectoire on élimine la variable temps  $t$ .

On obtient ainsi l'équation:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha \cdot x$$

Dans le référentiel terrestre, la trajectoire du centre d'inertie  $G$  d'un projectile, contenue dans le plan défini par la verticale et la direction de la vitesse initiale, est un arc de parabole.

La flèche est l'altitude maximale atteinte ( $H = y_s$ ). Cette altitude correspond au sommet  $S$  de la trajectoire.

En  $S$  le vecteur vitesse  $\vec{V}_s$  est horizontal. La composante verticale de la vitesse est donc nulle ( $V_{ys} = 0$ ), d'où:

$$V_{ys} = -g \cdot t_s + V_0 \cdot \sin\alpha = 0$$

On en déduit l'instant  $t_s$  correspondant à la flèche:

$$t_s = \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

En reportant cette valeur dans l'équation donnant la position  $y(t_s)$  on obtient:

$$H = y_S = y(t_S) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_S^2 + V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_S = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2 + V_0 \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)$$

C'est-à-dire:

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}$$

Il faut remarquer que l'on peut retrouver cette valeur en remarquant que la dérivée de la fonction  $y = f(x)$  s'annule pour la valeur de l'abscisse  $x_S$  de la flèche.

La portée est le point d'abscisse maximale atteint ( $D = x_A$ ). Cette portée correspond à une valeur nulle de composante suivant l'axe  $Oy$  de la position ( $y_A = 0$ ).

On a donc en ce point **A** la relation:

$$y_A = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{V_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x_A^2 + \tan\alpha \cdot x_A = 0$$

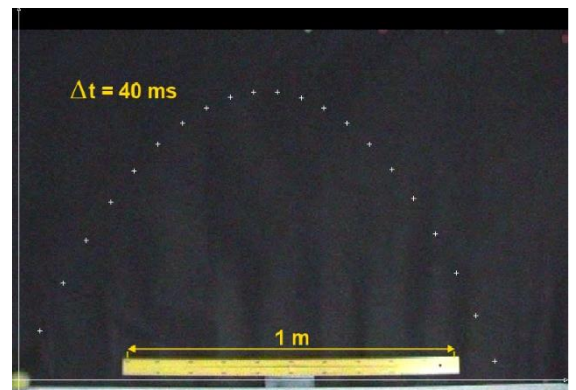
D'où la valeur de la portée:

$$D = x_A = \frac{2 \cdot V_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

### 3- Traitement d'un document vidéo

On s'intéresse au mouvement d'une balle lancée avec une vitesse initiale  $\vec{V}_0$  faisant un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

En utilisant le logiciel Latis Pro et en suivant les explications données lors de la séance, relever les différentes positions (**x et y**) de la balle en fonction du temps **t**.



Une fois l'acquisition effectuée, enregistrer le fichier sous le nom "Lancer parabolique - Balle".

Le pointage réalisé avec Latis Pro permet de réaliser la chronophotographie de cette expérience.

### 4- Exploitation des résultats

Afficher la courbe  $y = f(x)$ . A quoi correspond cette courbe?

Modéliser cette courbe par la fonction " $y(x) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot x^2 + b \cdot x$ " à l'aide de l'outil "modélisation".

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \quad \cdot x^2 + \quad \cdot x$$

Que peut-on en déduire quant au type de trajectoire?

Afficher l'évolution temporelle de la position  $x = f(t)$  puis grâce à l'outil "modélisation", modéliser cette courbe par la fonction " $x(t) = a \cdot t$ ".

$$x(t) = \quad \cdot t$$

Quelle est la nature du mouvement de la balle suivant l'axe  $Ox$ ?

Que représente la valeur  $a$ ?

En déduire la valeur de la vitesse  $V_{0x}$  suivant l'axe  $Ox$ ?

$$V_{0x} =$$

Afficher l'évolution temporelle de la position  $y=f(t)$  puis grâce à l'outil "modélisation", modéliser cette courbe par la fonction " $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + b \cdot t$ ".

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot \quad \cdot t^2 + \quad \cdot t$$

Quelle est la nature du mouvement de la balle suivant l'axe  $Oy$ .

Que représente la valeur  $b$ ?

En déduire la valeur de la vitesse  $V_{0y}$  suivant l'axe  $Oy$ ?

$$V_{0y} =$$

Que représente la valeur  $a$ ?

En déduire la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$  suivant l'axe  $Oy$ ?

$$g =$$

Comparer cette valeur avec la valeur couramment admise  $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

En utilisant les valeurs  $V_{0x}$  et  $V_{0y}$  calculer la valeur de la vitesse initiale  $V_0$  de la balle?

$$V_0 =$$

En utilisant l'outil dérivée, dériver la fonction  $y(t)$  puis faire une régression linéaire. Que représente cette droite?

En déduire la valeur de  $g$ .

$$g =$$

En utilisant les valeurs  $V_{0x}$  et  $V_{0y}$  calculer la valeur de la tangente puis de l'angle  $\alpha$  entre l'horizontale et le vecteur vitesse initiale  $\vec{V}_0$ .

$$\tan \alpha =$$

$$\alpha =$$

Quelle est la valeur  $H$  de la flèche de cette trajectoire?

$$H =$$

Quelle est la valeur de la portée de cette trajectoire?

$$D =$$

Conclure.